22107229

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – CONJUNTOS, RELACIONES Y GRUPOS

Jueves 20 de mayo de 2010 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 10]*

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define así

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}.$$

(a) Compruebe que f es una aplicación biyectiva. *[4 puntos]*

(b) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$. *[6 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 10]*

La relación R se define para matrices de 2×2, de forma que $\boldsymbol{A}R\boldsymbol{B}$ si y solo si existe una matriz no singular $\boldsymbol{H}$ tal que $\boldsymbol{AH} = \boldsymbol{HB}$.

(a) Compruebe que R es una relación de equivalencia. *[7 puntos]*

(b) Sabiendo que $\boldsymbol{A}$ es singular y que $\boldsymbol{A}R\boldsymbol{B}$, compruebe que $\boldsymbol{B}$ también es singular. *[3 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Considere el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ con respecto a la operación binaria $*$, donde $*$ denota la multiplicación módulo 8.

(i) Escriba la tabla de Cayley para $\{A, *\}$.

(ii) Compruebe que $\{A, *\}$ conforma un grupo.

(iii) Halle todas las soluciones de la ecuación $3 * x * 7 = y$. Dé las respuestas de la forma (x, y). *[9 puntos]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 3: continuación)

(b) Considere ahora el conjunto $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ con respecto a la operación binaria $\otimes$, donde $\otimes$ denota la multiplicación módulo 10. Compruebe que $\{B, \otimes\}$ no conforma un grupo. *[2 puntos]*

(c) Se puede formar otro conjunto C eliminando un elemento del conjunto B, de forma que $\{C, \otimes\}$ conforme un grupo.

(i) Indique cuál es el elemento que hay que eliminar.

(ii) Determine si $\{A, *\}$ y $\{C, \otimes\}$ son isomorfos. *[3 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

La permutación p_1 del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ se define de la siguiente forma

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) (i) Indique la inversa de p_1.

(ii) Halle el orden de p_1. *[5 puntos]*

(b) Otra permutación p_2 se define de la siguiente forma

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determine si la composición de p_1 y p_2 es conmutativa.

(ii) Halle la permutación p_3 para la cual se cumple

$$p_1 p_3 p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$ *[8 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 13]*

Sea G un grupo cíclico finito.

(a) Demuestre que G es abeliano. *[4 puntos]*

(b) Sabiendo que a es un generador de G, compruebe que a^{-1} también es un generador. *[5 puntos]*

(c) Compruebe que si el orden de G es cinco, entonces todos los elementos de G, aparte del elemento neutro, son generadores de G. *[4 puntos]*